Философский журнал
2023. Т. 16. № 4. С. 158–179
УДК 164.043

The Philosophy Journal
2023, Vol. 16, No. 4, pp. 158–179
DOI 10.21146/2072-0726-2023-16-4-158-179

ФИЛОСОФИЯ И НАУЧНОЕ ПОЗНАНИЕ

Н.Р. Шаропова

ГЕОМЕТРИЯ НЕВЫРАЗИМОГО: ОПЫТ ОДНОГО ПОСТРОЕНИЯ

Шаропова Нигина Рустамовна – младший научный сотрудник сектора эстетики. Институт философии РАН. Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1; e-mail: nrsharopova@gmail.com

Геометрия изображения зачастую представляется областью такого технического знания, которое скорее расширяет дисциплинарное поле исследований визуального, чем становится для них методологической основой. Несмотря на очевидную историческую и концептуальную связь математики и визуального, даже базовые геометрические знания отнюдь не являются распространенной компетенцией исследователей изображений и визуального. Если же геометрия используется, то в подавляющем большинстве случаев работы так и остаются в области технического знания, истории математики или позитивистски фундированных теорий, другими словами, не затрагивают наиболее важные для гуманитарных исследований вопросы. Редкие же нетехнические работы в этой области не находят должного признания и распространения в более широкой среде специалистов. В статье предлагается основной результат проделанного автором исследования, предметом которого выступила изобразительная глубина. Изобразительная глубина является одной из версий специфического опыта дистанции, с которым традиционно связывают образ. Проблематика дистанции является классической областью именно философской рефлексии над образом. В статье представлена попытка геометрического выражения одной из ее версий, а именно изобразительной и зрительной глубины. При этом сохраняется важное для нее измерение недоступности и гетерогенности, т.е. опыт глубины не редуцируется до зрительных данных или буквальной геометрии плоского изображения. Автор показывает, как, геометрически сконструировав объект, можно извлекать интуитивно неочевидные свойства, которые не были бы доступны при непосредственном анализе опыта и другими способами невооруженной рефлексии. В статье представлены лишь некоторые из полученных в ходе исследования выводов.

Ключевые слова: изображение, образ, перспектива, геометрия, феноменология, Мерло-Понти, Ж.-Л. Марьон

Для цитирования: *Шаропова Н.Р.* Геометрия невыразимого: опыт одного построения // Философский журнал / Philosophy Journal. 2023. Т. 16. № 4. С. 158–179.

Среди исследований визуального обращения к геометрии немногочисленны. Геометрия изображений и геометрический анализ художественных работ чаще всего находятся в ведении узких специалистов, изучающих определенные технические и исторические аспекты. Кроме того, обращение к геометрии, как правило, связано с конкретными периодами, а именно с теми, где геометрия так или иначе тематизирована внутри самой художественной практики. Обычно это античное искусство[1], искусство Возрождения и модернизма.

Так, в исследованиях ренессансной теории перспективы геометрическая основа задействована лишь в самых общих чертах. Если же рассматривается конкретное геометрическое решение художественных задач, то такие работы чаще пишутся математиками, а их обширные версии публикуются как исследования по истории математики[2]. Для искусствоведов математическая основа часто представляется лишь средством, не имеющим фундаментального отношения к художественному содержанию, математиков же художественный контекст интересует лишь в той мере, в которой он провоцировал развитие математики[3]. В целом кажется, что в исследованиях перспективы концептуальный размах обратно пропорционален обращению к математической основе, что уводит рассмотрение этих подробностей в узкие специальные области[4].

Что касается модернистского искусства, то основной геометрический сюжет исследований – многомерные геометрии и четвертое измерение. Интерес к геометрии здесь также связан с самим материалом, поскольку художественные круги претерпели значительное влияние идей новых геометрий, в частности, и в особенности – идеи четвертого измерения[5]. Как правило,

---

1 Существует немало изложений и исследований, где античность рассматривается вместе с Возрождением. Потому приведем здесь работу, в которой автор старается показать не преемственность, но разрыв между эпохами: *Ivins W.M.* Art and Geometry: A Study in Space Intuitions. Cambridge (MA), 1946.

2 Основное фундаментальное монументальное исследование в этой области, представляющее собой очень подробный восьмисотстраничный «каталог» внушительного перечня геометрических идей, построений, более-менее оформленных теорий Ренессанса, а также более поздние математические теории перспективы, включая проективную геометрию и др. Опубликован в серии по истории математики.

3 Однако следует выделить важную работу Раушенбаха: *Раушенбах Б.В.* Геометрия картины и зрительное восприятие. СПб., 2002. Эта работа является важным примером рассматриваемой области, но здесь важнее критическое отношение автора к представлению о визуальном восприятии как о ренессансной перспективе; кроме того, предлагается другая математическая модель, отражающая более современные представления о визуальном восприятии. С этой позиции анализируются различные художественные попытки выразить пространство, в связи с чем предлагается существенный пересмотр их оценки и содержания. Рассмотрение данной работы следовало бы вывести в основную часть статьи, что, к сожалению, невозможно сделать в силу очень емкого изложения материала. Также следовало бы сопоставить проделанную работу с анализом восприятия глубины, предложенную знаменитым психологом Дж. Гибсоном в работе «Экологический подход к зрительному восприятию». Однако и это сопоставление мы вынуждены пока опустить.

4 Наиболее характерный пример «Перспектива как “символическая форма”» Э. Панофского (*Панофский Э.* Перспектива как «символическая форма». Готическая архитектура и схоластика. СПб., 2004). Это одна из наиболее влиятельных и известных концептуальных работ о перспективе. При этом геометрическая основа перспективы практически полностью редуцирована. Перспектива сведена к версии композиционного расположения. И в этом виде уже анализируется содержательно.

5 Основной монографией по этой теме является работа: *Henderson L.D.* The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art. 2nd ed. Cambridge (MA), 2013. Оригинальное издание 1983 г. касалось только искусства модернизма, во втором издании работа была существенно расширена исследованием отсылок к этому сюжету в искусстве вплоть до нулевых годов.

эти геометрии освещаются и задействуются настолько, насколько они нашли непосредственное отражение в художественном материале, но не как самостоятельная методологическая основа[6].

Другой тип работ на стыке математики и визуальных исследований связан с появлением и развитием визуализации и компьютерной графики. В работах на стыке искусства и математики разрыв между математическим и визуальным зачастую никак не преодолевается, а связь математики и искусства мыслится в очень консервативном ключе, например, указывается, что такие математические объекты обладают эстетическими характеристиками, или что сами художники могут выполнять визуализации[7]. В более поздних медиа-исследованиях ситуация иная в силу значительного внимания к аппаратной основе и критике анализа интерфейса[8].

Упомянем последний тип исследований, в которых происходит обращение к математике. Это более локальные объекты, которые имеют буквальный математический коррелят: например, мыльные пузыри[9] и узлы[10]. Однако и в этих случаях математическая часть так и не соединяется с культурологической[11].

Таким образом, складывается впечатление, что математика фигурирует лишь в исследовании того материала, где о ней непосредственно идет речь и зачастую ровно в той степени, в которой о ней идет речь. Но даже в этих работах математическое и культурное продолжают расслаиваться, разбиваясь иногда на едва связанные между собой блоки материалов[12].

В философских же работах об образе и визуальном, ставших классическими, в которых разрабатываются более фундаментальные аспекты визуальной среды и образа, отсылок к геометрии или другим формальным теориям не встречается вовсе, они не рассматриваются в функции методологического аппарата.

Таким образом, математике зачастую не удается стать языком, в котором могли бы быть осмыслены те или иные явления визуальной культуры,

---

6 Можно выделить работу о четвертом измерении, которая в том числе затрагивает модернистское искусство «Тени реальности» (*Robbin T.* Shadows of Reality: The Fourth Dimension in Relativity, Cubism, and Modern Thought. New Haven, 2006), в ней подробно рассматриваются различные типы моделей гиперпространства и отдельно роль проекции в искусстве, математике и физике.

7 The Visual Mind: Art and Mathematics. Cambridge, 1993. P. 1–5.

8 *Gaboury J.* Image Objects. An Archaeology of Computer Graphics. Cambridge, 2021.

9 *Emmer M.* Soap Bubbles in Art and Science: From the Past to the Future of Math Art // Leonardo. 1987. Vol. 20. No. 4: 20th Anniversary Special Issue: Art of the Future: The Future of Art. P. 327–334.

10 *Küchler S.* Why Knot? Towards a Theory of Art and Mathematics // Beyond Aesthetics. Art and the Technologies of Enchantment. Oxford, 2001. P. 57–78.

11 Так, в упомянутой статье о мыльных пузырях и пленках конографическая история мыльных пузырей так и не пересекается с их геометрией. Геометрия мыльных пленок никак не проясняет их символику в живописи. О геометрии мыльных пленок доступно и коротко см.: *Сосинский А.Б.* Мыльные пленки и случайные блуждания. М., 2012.

12 Из этого описания выбивается работа русского и советского художника и теоретика искусства Л. Жегина (*Жегин Л.Ф.* Язык живописного произведения. М., 1970). Жегин разработал собственную теорию обратной перспективы, пытаясь объяснить такое явление в иконах, как «горки». Его метод напоминает метод формалистов, в своем анализе он не опирается на исторические, богословские, иконографические данные, но находит исключительно формальные причины такого рода искажения предметов из геометрического построения.

даже там, где это предполагается. В философии же, где часто затрагиваются фундаментальные аспекты визуального и образного, т.е. безотносительно конкретного материала, такие интенции, кажется, не встречаются вовсе.

Возможно, такое положение дел связано со все еще широко распространенным представлением среди философов о том, что существуют особые объекты или даже целые области, с которыми такие строгие формальные дисциплины, как логика и математика, не могут иметь дела. И в этой парадигме по сей день встречается «апофатический» стиль рассуждений, где невыразимость предстает неотъемлемым свойством таких объектов. Например, в апелляциях к структуре травмы. Попытки внести строгость и ясность признаются наивными.

В этой статье мы постараемся показать, что формальная запись возможна и уместна в том числе и в отношении фундаментальных гуманитарных вопросов. А формализация может избежать тривиализации в этих сложных случаях. И хотя в рамках данной статьи мы не сможем показать, в каком широком круге вопросов нас может продвинуть преодоление такого рода сложности, все же читатель увидит, что даже те выводы из записи, которые мы все-таки здесь представим, не могли бы быть получены интуитивным и спекулятивным путем.

Итак, в этой работе мы предложим геометрическую запись одного трудно артикулируемого объекта и покажем, какие выводы можно сделать на основе полученной записи. Речь пойдет о глубине – феномене, который М. Мерло-Понти понимал как принципиально не поддающийся геометрическому описанию, а другой феноменолог Ж.-Л. Марион включал его в более широкую апофатическую линию своих работ, которая в пределе связана с дистанцией к словесной артикуляции в принципе.

Метод проделанного анализа опирается на геометрию и теорию групп. Статья разделена на три части. В первой части представлен краткий обзор философского понимания глубины, которое наиболее эксплицитное выражение получило у феноменологов. Вторая часть – основная, здесь осуществляется построение геометрической версии глубины. В третьей части бегло представлены некоторые из выводов, которые можно извлечь на основании осуществленного построения.

I. Феноменологическое определение глубины

Одна из конституирующих характеристик образа – его дистантность. Дистанция фигурирует в работах классических авторов, сформировавших область теории образа и визуальных исследований, в разных формах. Иногда буквально – как непосредственно наблюдаемая отделенность образа от материала и физического пространства, в котором его располагает тело носителя (изображенный человек не стареет, нельзя сломать изображенный стул, и т.д.). Иногда генеалогически в связи с конкретным контекстом существования образа (вотивного) или с техникой его производства (уникальной и невоспроизводмой). А также в контексте утраты этой дистанции, появления зрелищ. Но так или иначе концептуально образ классически вводится через некую дистанцию, через оппозицию к доступному и профанному. Тогда глубина является одной из версий такого рода дистанции.

Мы будем опираться именно на феноменологическую интерпретацию глубины. Феноменологический анализ задает глубину как непосредственно переживаемый опыт дистанции. Таким образом, в этой версии дистанция предстает как наличное переживание, а не сложная метафорическая или историческая конструкция, и от такой интерпретации нам будет легче оттолкнуться в построении. Здесь мы будем опираться на двух авторов, которые затрагивали этот феномен непосредственно, на М. Мерло-Понти и Ж.-Л. Мариона.

В предпринятом анализе Мерло-Понти настаивает на отличии геометрической интерпретации глубины от того, как она дана нам в опыте. Глубина – это не «ширина, взятая в профиль». Глубина – это включение взгляда в объект. Перспективные искажения отражают не свойства тел, но их отношение к видящему (ближе, дальше, впереди или позади и т.д.)

«Третье измерение [в смысле глубины] – среди всех измерений, – так сказать, наиболее экзистенциальное, потому что *оно не указано на самом объекте* (курсив наш. – *Н.Ш.*), оно со всей очевидностью принадлежит перспективе, а не вещам; следовательно, оно не может быть выведено из этих последних… Оно указывает на некую нерушимую связь между вещами и мною… тогда как ширина может, на первый взгляд, сойти за разновидность отношения между самими вещами, которое не предполагает наличия воспринимающего субъекта»[13].

Мерло-Понти отличает глубину от наполняющих ее поверхностей. Глубина не может предстать как объект. Мы не видим глубину, мы видим *сообразно с ней*. Глубина без наполняющего ее содержания для Мерло-Понти – это ночь.

«Ночь не является объектом передо мной, она меня окутывает… Я уже не стою на моем перцептивном посту, рассматривая оттуда профили объектов… У ночи нет профилей, она касается меня как таковая»[14].

Кроме того, в нее нельзя заступить, к ней нельзя приблизиться, сходящаяся к горизонту перспектива недостижима, в отличие от наполняющего ее содержания. Как пишет Марьон, глубина отодвигается по мере продвижения в нее.

Для Марьона в целом гораздо важнее именно недоступный, дистантный характер глубины, ее гетерогенность вещам, видимому и холсту. Так, икона для него не переводит Бога в область видимого, но утверждает абсолютный разрыв с видимым. Эта линия просматривается и в анализе Марьоном изобразительной глубины как таковой, которая проникает в плоскость через невидимое. На примере его анализа «Венчания девы Марии» можно заметить, что гетерономный характер глубины в пределе обозначает разрыв со всяким доступным и посюсторонним:

«…группа персонажей на переднем плане собрана вокруг рук супругов, соединяемых священником; но прямо над ними (физически написанное в нескольких сантиметрах над их головами) вздымается здание, единственная функция которого – вести, через дверь и видный за нею проход к другой открытой двери с противоположной стороны, к небу – небу, обрамленному массивностью этого здания, *отделенному от эмпирического реального неба*, которое однако возвышается над показанной сценой. Такая дверь открывает

[13] *Мерло-Понти М.* Феноменология восприятия. СПб., 1999. С. 329.

[14] Там же. С. 365.

небо, чуждое небу реальному, и оно имеет другую функцию; очевидно, пустота, которой наполнена дверь, завершает прорыв, уже начатый линиями плит площади, которые продолжают равномерное распределение центральной группы. Планы больше не накладываются друг на друга, они устремляются вперед, все дальше в глубину, к проему в центре, который буквально засасывает их. Вся картина целиком бежит к точке схода, к пустоте в центре»[15].

Кроме того, изображение и его глубина для обоих авторов являются не оптической иллюзией, но чем-то действительным.

«Рисунок, изображающий перспективу, не воспринимается так, как будто он сначала исполнен в определенной плоскости и только потом обретает глубину… Тополь на дороге, изображенный меньшим по размеру, чем человек, может стать настоящим деревом, только отступая к горизонту. *Именно сам рисунок стремится к глубине»* (курсив наш. – *Н.Ш.*)[16].

Итак, глубина предстает как эффект наличия субъекта, как гетерономный отсутствующий объект и потому недоступный, расположенный на неустранимой дистанции, а глубина изображения – как действительный «мир».

II. Построение

Шаг 1: определение метода построения

Утверждение № 1:

Предмет теории – это инвариант заданных в ней преобразований.

Это один из главных тезисов «Эрлангенской программы» Ф. Клейна[17]. Согласно ему, теория изучает те свойства, которые являются в ней константными. В строгом смысле Клейн предложил рассматривать геометрию как множество, на котором действуют некая группа преобразований. То, что остается неизменным при действии заданных преобразований, является предметом этой геометрии.

Пример № 1:

Геометрии Евклида соответствует следующая группа движений: перенос на заданный вектор, поворот, отражение. Инвариантом этой группы является расстояние: сколько бы мы ни двигали, не поворачивали и не отражали фигуры или тела, расстояние между точками останется неизменным, т.е. размер (и форма) фигур/тел. Следовательно, евклидова геометрия изучает расстояние, т.е. метрические свойства тел.

Утверждение № 2:

Объект – это группа преобразований, для которой он является инвариантом.

---

15 *Марион Ж.-Л.* Перекрестья видимого. М., 2010. С. 21–22.

16 *Мерло-Понти М.* Феноменология восприятия. С. 337.

17 «Эрлангенская программа» – знаменитый доклад Клейна, в котором он предложил единый взгляд на все геометрии: *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа») // Об основаниях геометрии. М., 1956. С. 399–434.

Преобразуем тезис Клейна в другое утверждение. Почему так можно поступить? Подход Клейна определяет геометрию весьма широко как некое множество и действующую на нем группу. Например, евклидова геометрия задается группой движений (см. Пример № 1) на множестве ℝ2 (алгебраический образ непрерывной плоскости). С такой точки зрения мы можем определить некоторые «малые» геометрии конкретных фигур и тел, поскольку можно построить их группы, т.е. задать такие преобразования, которые оставят фигуру «на месте» (она в этом случае выступает инвариантом этой группы).

Пример № 2:

Равносторонний треугольник не изменит форму, размер и расположение, если мы повернем его на 120, 240 и 360 градусов, а также отразим вдоль трех осей – его биссектрис[18]. Эти преобразования являются группой[19], действующей на плоскости. Так мы получили «малую» геометрию равностороннего треугольника: задано множество и группа преобразований, действующих на нем. Равносторонний треугольник – инвариант этой группы (рис. 1).

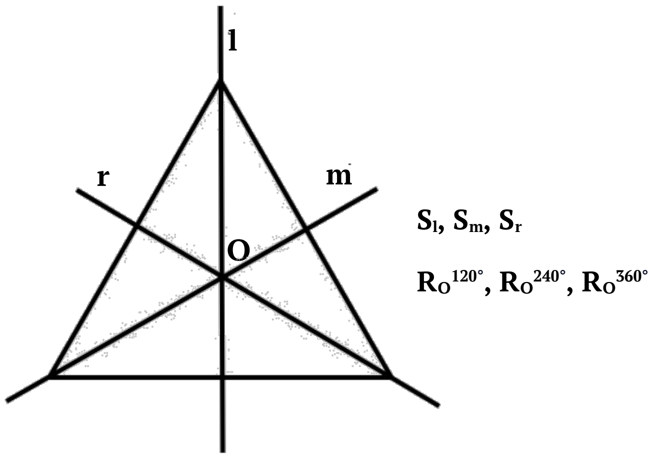


Рис. 1. Изометрия равностороннего треугольника представляет собой 6 преобразований: три отражения вдоль биссектрис l, m, r и три поворота с центром в точке O, кратных 120°.

Пользуясь взглядом Клейна на геометрию, мы могли бы заменить привычное определение равностороннего треугольника – замкнутая кривая, образованная тремя точками, не лежащими на одной прямой и расположенными так, что три отрезка, попарно соединяющие их, равны – на теоретико-групповое. То есть можем определить треугольник через группу, действующую на плоскости, для которой он является инвариантом. Под утверждением № 2, следовательно, подразумевается именно такого рода задание объекта. *То есть под построением объекта мы будем иметь в виду построение его группы*.

---

[18] Отразить вдоль прямой означает зеркально поменять местами все точки, кроме точек самой прямой. Отражение можно еще представить как вращение в n+1 измерении.

[19] В силу того, что они удовлетворяют аксиомам группы. Здесь мы вынуждены не останавливаться на определении группы и ее аксиомах. Их легко найти, например, здесь: *Алексеев В.Б.* Теорема Абеля в задачах и решениях. М., 2018. С. 20–21.

Утверждение № 3:

Глубина – это группа преобразований на заданном множестве, инвариантом которой является бесконечно удаленная прямая (горизонт).

Чтобы мы смогли пойти по обозначенному в утверждениях 1 и 2 пути, нам нужно выбрать некий геометрический коррелят глубины и найти геометрию, которая будет иметь его в качестве инварианта. Поскольку в своем самом буквальном виде глубина связывается с перспективой, то за объект мы возьмем бесконечно удаленную прямую. Это особый элемент, который есть в проективной геометрии. Ее можно представлять как горизонт, поскольку бесконечно удаленная прямая – это прямая, в точках которой пересекаются параллельные прямые. Таким образом, если в евклидовой геометрии параллельные прямые не пересекаются по определению, то в проективной параллельные прямые – это такие прямые, которые пересекаются в бесконечно удаленных точках, а эти точки составляют бесконечно удаленную прямую.

Почему именно этот элемент кажется подходящим для построения глубины (т.е. в качестве инварианта искомой геометрии)? Можно привести несколько аргументов. Глубина в феноменологическом анализе связана с перспективой, даже если не сводима к ней (этот вопрос тоже будет рассмотрен нами далее). И Марьон, и Мерло-Понти отсылают к перспективным изображениям и в целом говорят о перспективных искажениях. При этом перспективное искажение и углубление, конечно, предполагает такую прямую схождения – горизонт, место пересечения параллельных прямых. Далее, одно из главных выделяемых свойств глубины – недоступность и гетерогенность. Недоступность же глубины «стягивается» к горизонту – прямой, которой нет и до которой принципиально невозможно дойти. Эта прямая не является частью множества, в котором мы движемся (это станет ясно из следующих шагов), в этом смысле она как бы *мнимая*. Поскольку эта прямая задается точками прямых, которые не пересекаются – параллельных. Таким образом, все значимые свойства глубины могут быть атрибутированы линии горизонта, выражением которого является бесконечно удаленная прямая.

Результат этого шага:

Мы будем считать, что сконструировали глубину как геометрический объект, если найдем такую группу, действующую на некоем множестве, которая имеет своим инвариантом бесконечно удаленную прямую.

Шаг 2: Введение проективной геометрии и рассмотрение ее в роли искомой теории глубины

Перейдем к поиску такой геометрии. В начале рассмотрим наиболее очевидного претендента – проективную геометрию, поскольку именно она содержит бесконечно удаленную прямую. Для этого вначале коротко представим эту геометрию. При этом многие принципиально важные положения для этой геометрии будут опущены для упрощения восприятия материала.

Пример № 1: Гомология – преобразование с неподвижной прямой и точкой

На протяжении всей статьи мы будем иметь дело только с одним типом проективного преобразования, поэтому только его мы и представим.

Его примеры хорошо знакомы многим, поэтому мы зададим его не формально, а наглядной иллюстрацией. Представим (см. рис. 2), что мы смотрим на некий предмет. Он отражает световые лучи, которые фокусируются в хрусталике глаза. Глаз в определяемом нами преобразовании будет *центром проекции*, отраженные лучи – *проектирующими прямыми*. Перевести объект в образ мы сможем, если добавим экран, как это показано на рисунке. Представим, что между глазом и объектом расположен экран – например, прозрачное стекло; точки, в которых лучи пересекут экран, составят образ объекта. Поэтому если мы обведем по стеклу контур того, что видим сквозь него, то получим реалистическое изображение. Другой наглядный пример – проектор. Сечения светового конуса проектора в разных местах и под разным углом тоже будут проективными преобразованиями; образ, полученный при первом положении экрана, преобразуется во второй при помощи изменения положения экрана. То есть меняя расположение экрана, мы будем переводить исходное изображение в другие (проективным способом).

При этом у описанного преобразования есть два неподвижных элемента. Во-первых, центр. Очевидно, что как бы мы ни переставляли экран, проектор останется на месте. Второй неподвижный элемент – это пересечение экранов, т.е. ось. Поскольку преобразование по определению является бинарной операцией, то преобразованием мы считаем переход от одного положения экрана к другому, т.е., есть всего их два – исходное и конечное. Поэтому прямая, где они пересекутся, не может никуда перейти, ведь она принадлежит плоскостям обоих экранов.

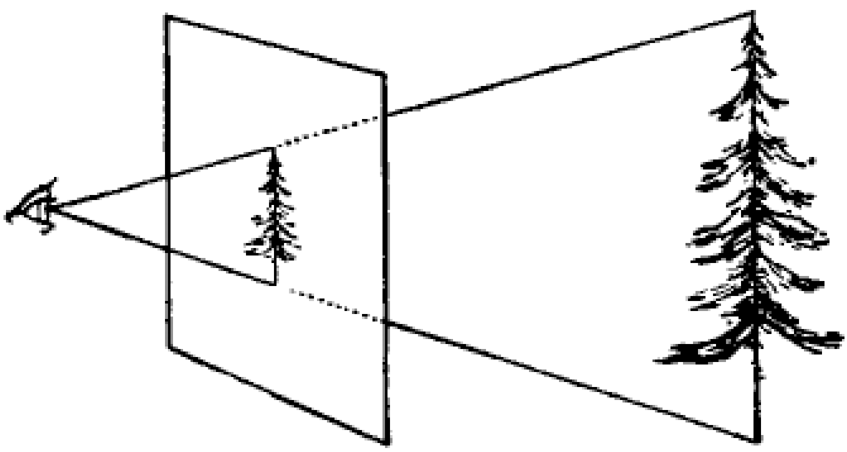


Рис. 2. Проектирование.
Источник: *О.А. Вольберг.* «Основные идеи проективной геометрии». М., 2009.

Пример № 2: Бесконечно удаленная точка и завершение прямой

Переход к проективной геометрии можно мыслить как пополнение Евклидовой плоскости бесконечно удаленной прямой. Это верно и для других размерностей. В одномерной версии мы бы сказали, что переход от Евклидовой прямой к проективной предполагает пополнение первой бесконечно удаленной *точкой*.

На рисунке (рис. 3) показано, как это пополнение связано с параллельностью, и как оно изменяет структуру прямой. Предложенное построение (см. подпись) иллюстрирует, что добавление бесконечно удаленных точек завершает прямую до окружности. И что обычную прямую можно представлять как окружность без одной точки.

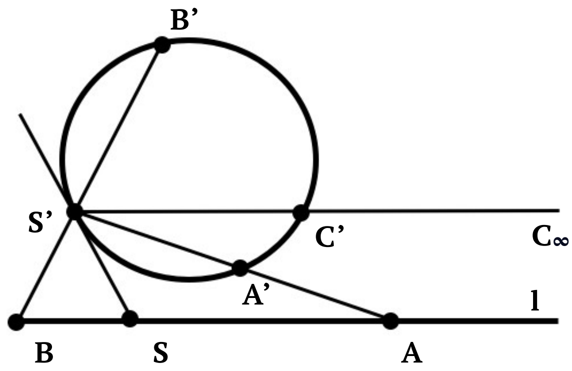
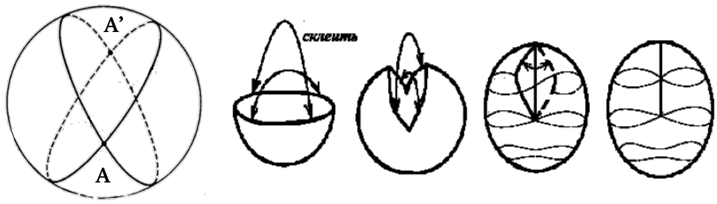


Рис. 3. Проекция прямой на окружность

Точки прямой l переводятся в точки окружности следующим способом. Выбираем произвольную точку на окружности и соединяем ее с точками прямой l. Так мы получаем соответственные пары точек, например, AA’ и BB’. То есть те точки, в которых прямые, проходящие через выбранную точку (S’), пересекают окружность и прямую l, будут соответственными. То есть A и перейдет в A’ и так далее. Так мы перечислим все точки прямой и окружности, даже саму S’, для этого нам нужно опустить на прямую l касательную к S’ и получим пару SS’. Все, кроме одной: перечисляя все точки окружности, обнаружится такая, для которой не найдется прообраза на прямой, поскольку проведенная через нее и S’ прямая параллельна прямой l, т.е. они не пересекутся. Но в проективной геометрии прообразом C’ окажется бесконечно удаленная точка C. Таким образом, между прямой и окружностью установлено взаимно однозначное соответствие точек, т.е. прямые в проективной геометрии замкнуты.

Пример № 3: Бесконечно удаленная прямая и завершение плоскости

Соответственно, с плоскостью дело обстоит так же – она завершится в некую поверхность без края. Моделью такой плоскости является кросс-кэп. Мы уже знаем, что наша плоскость должна замкнуться. Если бы она замкнулась в сферу, то мы также могли бы говорить о том, что все прямые замкнуты и пересекаются, но в сферической геометрии они пересекаются *дважды* (см. рис. 4.1). Этот дефект мы можем исправить, отождествляя противолежащие точки, тогда две точки пересечения станут одной. Сделаем это так: сначала отождествим (склеим) верхнюю половину сферы с нижней (это склеивание отождествит антиподальные точки). Останется полусфера. Но ее край также состоит из противолежащих (диаметрально) точек. Значит, и их мы должны отождествить. Так мы получим кросс-кэп. На изображении и видео показано построение кросс-кэпа из полусферы.



1) 2) 3)

Рис. 4. Слева направо: 1) Пересечение двух прямых на сфере. В сферической геометрии прямыми считаются только окружности, образованные сечением сферы через ее центр. Любые две прямые будут пересекаться дважды в антиподальных точках. На рисунке две прямые пересекаются в точках А и А'; 2) «Склеивание» полусферы в кросс-кэп посредством отождествления оставшихся антиподальных точек на ее краях. Источник: *Н.В. Тимофеева*. Дифференциальная геометрия и элементы топологии. http://cito-web.yspu.org/link1/metod/met59/met59.html (23.09.2023); 3) QR-код со ссылкой на видео-презентацию образования кросс-кэпа из полусферы. Сгенерирован на сайте qrcoder.ru

Итак, вернемся к вопросу о том, можно ли считать проективную геометрию геометрией глубины? Пользуясь нашим перефразом тезиса Клейна, легко определить, что это не так. В самом деле, для всех, кто знаком с проективной геометрией, очевидно, что горизонт не может быть инвариантом. Во-первых, в проективной геометрии есть преобразование, которое переводит точки в прямые и прямые в точки. Поэтому по меньшей мере одно преобразование с очевидностью не сохранит бесконечно удаленную прямую, так как все прямые перейдут в точки, а исходные точки станут прямыми. Следовательно, и прямая на бесконечности тоже перейдет в некую точку. Во-вторых, если вернуться к приведенным примерам, то какую из прямых кросс-кэпа мы должны считать бесконечно удаленной (пример № 3)? Аналогично обстоит дело и с точками. Когда прямая завершилась в окружность, какую из точек этой окружности мы должны считать теперь бесконечно удаленной (пример № 2)? Когда мы пополнили бесконечно удаленным элементом плоскость или прямую, прямые и точки стали равнозначными. И, конечно, все точки и прямые мы можем двигать.

Результат этого шага:

Проективная геометрия не может быть геометрией глубины, поскольку содержащаяся в ней бесконечно удаленная прямая ничем не отличается от других, проективные преобразования могут перемещать ее и преобразовывать в точку. Хотя в ее множестве есть искомая прямая как элемент, для ее преобразований она не является инвариантом.

Шаг № 3: Геометрия горизонта

Вернемся к геометрии Евклида и представим ее наглядно с проективной точки зрения. Что имеется в виду и зачем нам предпринимать такой шаг? Подсказка к поиску интересующей нас геометрии содержится в результате предыдущего шага. В нем мы увидели, что в множестве проективной геометрии есть интересующая нас прямая, но группа преобразований этой геометрии не может ее сохранить неподвижной, т.е. в качестве собственно «той самой» прямой. Поэтому мы могли бы продолжить рассуждение следующим образом: рассмотреть, какая группа получится, если оставить только те проективные преобразования, которые не двигают одну прямую. Здесь для читателя пока еще может сохраняться некоторая неясность: все-таки какую-то прямую мы должны закрепить или именно бесконечно удаленную, и где ее искать на проективной плоскости, если мы только что выше обозначили, что на эту роль подойдет любая? Это будет подробно обсуждаться и разъясняться ниже, но уже можно заподозрить, что закрепленность прямой и производит ее как бесконечно удаленную.

Следование намеченному пути потребовало бы введения новых свойств и терминов и большего числа пояснений. Поскольку нам результат известен, мы сразу начнем обсуждать геометрию Евклида с проективной точки зрения, и потом покажем, что именно она и есть та геометрия, та группа, к которой сведутся проективные преобразования, если мы уберем из них те, которые могут двигать горизонт или изменять его структуру.

Итак, здесь мы рассмотрим евклидову геометрию с проективной точки зрения. Для того, чтобы сократить обилие математических подробностей, мы представим упрощенную версию, она достаточна для понимания. В любом случае, пример и сделанное на его основании утверждение являются верными и общеизвестными.

Пример № 1: Сечение конуса, сохраняющее форму

Все преобразования в Евкдлидовой геометрии сохраняют *размер* и *форму*. Это утверждение имеет наглядную очевидность в повседневном опыте: передвигая предметы, мы не можем изменить их размер и форму, и как мы уже упоминали ранее, группа, лежащая в основе евклидовой геометрии – это группа движений. Основываясь на этом факте, произведем следующее упрощение: мы не будем рассматривать каждое преобразование в отдельности, вместо этого рассмотрим в целом, что означает с проективной точки зрения сохранение размера и формы. Воспользуемся уже знакомой презентацией проективного преобразования через зрительный конус. Как нужно сечь конус, чтобы сохранилась форма?

Чтобы сохранилась форма, сечения должны быть параллельными друг другу (см. рис. 5). Как в нашем примере с проектором, если мы будем экран не только двигать ближе или дальше от проектора, но еще и наклонять его на разные углы, то получаемые изображения будут не только увеличиваться или уменьшаться, но и искажаться относительно друг друга.

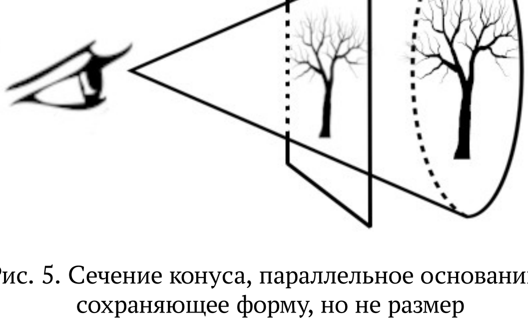


Рис. 5. Сечение конуса, параллельное основанию, сохраняющее форму, но не размер

В рамках примера № 1 из шага № 2 пояснялось, что преобразование, которое для простоты мы представляем через сечение зрительного конуса (или проектора), имеет два неподвижных элемента (т.е. эти элементы перейдут сами в себя, останутся на месте), а именно центр и ось. Центр в нашем случае – это точка глаза (вершина зрительного конуса), а ось – прямая, в которой пересекутся два экрана. Но мы только что показали, что для сохранения формы (т.е. подобия) сечения (т.е. наши экраны) должны быть параллельны друг другу. Но что это значит с проективной точки зрения? Это означает, что ось этого преобразования бесконечно удалена.

Утверждение № 1:

Проективное преобразование, которое сохраняет форму – это гомология, ось которой бесконечно удалена.

Пример 2: Сечение конуса, сохраняющее форму и размер

Рассмотрим теперь вопрос размера. Очевидно, что нельзя дважды посечь конус параллельно так, чтобы получить одинаковый по размеру срез, так как радиус конуса сокращается по мере восхождения к вершине и расширяется по мере движения от нее.

Из нашей презентации наглядно видно, что размер изменяется из-за формы самого конуса. Единственный способ иметь два равных параллельных среза – сделать прямые самого конуса параллельными, т.е. сделать так, чтобы они не сходились и радиус конуса не сокращался, а был бы всегда равным. Если в евклидовой геометрии выполнить такое условие невозможно (наше тело просто перестанет быть конусом, поскольку у него больше не будет вершины), то в проективной оно легко может быть выполнено.

Нужно разместить вершину конуса на бесконечно удаленной прямой. Тогда конус будет состоять из параллельных прямых и будет иметь вершину, поскольку они *пересекутся* в бесконечно удаленной точке (рис. 6).

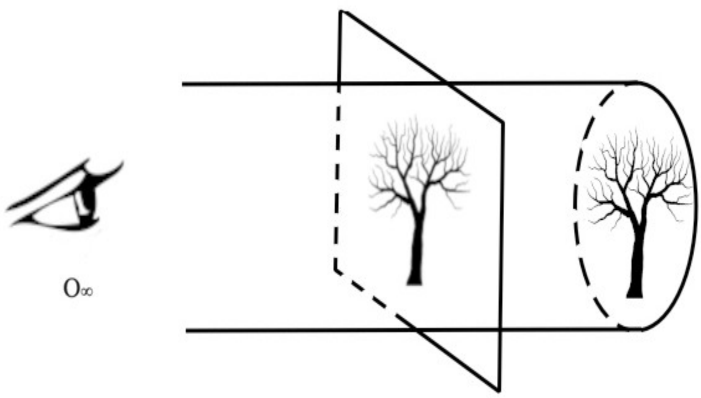


Рис. 6. Параллельное основанию сечение конуса с бесконечно удаленной вершиной, сохраняющее форму и размер

Утверждение № 2:

Проективное преобразование, которое сохраняет размер и форму – это гомология, ось и центр которой бесконечно удалены[20].

[20] Это означает, что центр лежит на оси. Такие гомологии называют параболическими.

Таким образом, чтобы при проективном преобразовании сохранить форму и размер, т.е. выразить тем самым на проективном языке свойства Евклидовой геометрии, мы должны ось и центр (неподвижные элементы преобразования) расположить на бесконечно удаленной прямой. Другими словами, условием сохранения формы и размера является инвариантность горизонта[21]. Таким образом, мы пришли к неожиданному результату.

Основной результат (1):

Геометрическое определение глубины – обычная евклидова геометрия. Вопреки центральному утверждению Мерло-Понти, «ширина, видимая в профиль» оказалось буквальным определением глубины.

Шаг 4: Завершение построения

Достигнутый нами промежуточный результат должен нас озадачить, ведь с точки зрения исходного замысла складывается странная ситуация.

Утверждение № 1:

Евклидова геометрия, которую можно было бы назвать определением горизонта, его не содержит. В проективной геометрии эта прямая содержится, но она не является горизонтом.

Как если бы сам объект находился (как элемент множества) в одной геометрии, а его определение в другой. То есть в одном случае горизонт и формируемая им глубина отсутствуют как *элемент*, в другом – как *функция*. В этом смысле наш объект не ухватывается *ни одной* из этих геометрий. То есть в каждой из них глубина выпадает, не записывается: в одном случае нет необходимого элемента, в другом элемент есть, но свою функцию в качестве горизонта он уже не выполняет.

Рассмотрим, что означает, если в проективной геометрии горизонт отсутствует как функция, т.е. как именно в проективной геометрии тривиализуется глубина. Отсутствие же горизонта как элемента в евклидовой геометрии представляется вполне понятным: он отсутствует буквально, в евклидовой геометрии попросту нет бесконечно удаленной прямой.

Пример № 1:

Мы привыкли понимать окружность как некую определенную форму, которая описывается как кривая, все точки которой равно удалены от центра. Несмотря на введенное представление о расстоянии, в таком виде это определение кажется лишь более строгой артикуляцией воображаемого представления об окружности, т.е. привязанного к конкретной визуальной форме.

Рассмотрим теперь, чем является окружность с проективной точки зрения. Окружность – это частный случай конического сечения (рис. 7). Всего выделяют 4 вида конических сечений: окружность, эллипс, парабола и гипербола. В проективной геометрии оперируют именно этим объектом, поскольку все перечисленные виды могут переходить друг в друга. Таким образом, окружность здесь – частный случай такого объекта (сечения конуса). А именно: окружность – это сечение конуса, *параллельное* его основанию.

---

[21] Более подробное вложение одной геометрии в другую с наглядными изображениями см. в конце статьи.

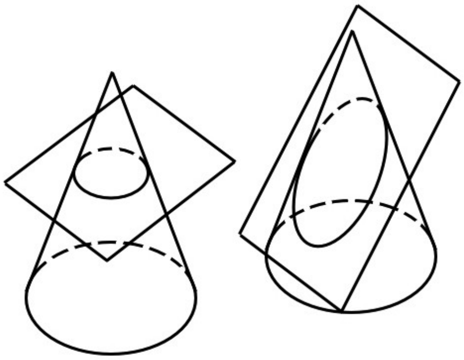


Рис. 7. Два вида конических сечений

Но представим, что мы находимся в проективном мире. Как определить, какие из плоскостей сечения конуса параллельны плоскости его основания, если в нашем мире все плоскости пересекаются? Поскольку прямая пересечения параллельных плоскостей является бесконечно удаленной, как мы можем узнать, какая именно из всех прямых пересечения плоскостей является горизонтом?

Об этом уже шла речь раньше в примерах № 2, 3 из шага № 2: когда прямая уже завершена в окружность, т.е. уже пополнена бесконечно удаленной точкой, то какая из точек будет бесконечно удаленной? Аналогично с плоскостью: где на кросс-кэпе расположена бесконечно удаленная прямая?

В самом деле, может показаться, что бесконечно удаленная прямая – «особенная», ведь на ней пересекаются «особые» прямые – параллельные. Однако как только бесконечно удаленную прямую добавили к плоскости, она стала абсолютно обычной прямой, которая ничем не отличается от других. Ей попросту *нечем* отличаться. Она *доступна* – ограничений на построения с ее использованием нет. В ее точках, как и в точках любой другой прямой, пересекаются прямые, т.е. она не вводит параллельность. Проективные преобразования могут ее перемещать и превращать в точку, поэтому даже если она была бы недоступной на первом шаге, ее легко сделать доступной на втором. Соответственно, верно и обратное: для любой доступной прямой найдется преобразование, переводящее ее на место той, которую мы приняли за горизонт. То есть любая прямая может рассматриваться как бесконечно удаленная.

Как если бы раньше мы не могли дойти до горизонта, поскольку такого места на нашей плоскости просто нет. Теперь же это место есть и до него вполне можно дойти, только какое из этих мест является горизонтом, мы не знаем. Или, что то же самое, любое место может им быть. Поскольку горизонт больше ничем не отличается от любой другой прямой. Тривиализовалась сама функция, делавшая это место «*особым*».

Таким образом, как только мы вводим интересующий нас объект, он тривиализуется. То есть как только мы добавляем его в качестве конкретного элемента, он сразу же утрачивает свою специфику и становится рядовым элементом множества, в котором никакой элемент не выполняет этой функции, или, что то же самое, на эту роль сгодится любой. Любая прямая может быть назначена на роль бесконечно удаленной и никакая не является таковой «сама по себе».

Таким образом, каждая из рассматриваемых геометрий является не записью глубины, но провалом записи. В случае евклидовой геометрии функция есть, но того, что эту функцию выполняет, нет. То есть евклидова геометрия сохраняет бесконечно удаленную прямую неподвижной, особой, как раз в роли той прямой, до которой не дойти, и, как мы покажем ниже, в которой как раз глубина разворачивается как феномен. Но объекта, который все это обеспечивает, т.е. производит глубину как феномен или, в геометрическом смысле, является ее предметом и инвариантом, этого объекта в ней собственно и нет. Во втором случае все необходимые элементы на месте, но стирается сама глубина, как феномен и функция. Таким образом, мы пояснили утверждение № 1 этого шага, а также пояснили, какая именно тривиализация глубины происходит в проективной геометрии.

Утверждение № 2:

Бесконечно удаленная прямая функционирует в проективной геометрии точно так же, как и любая другая прямая проективной плоскости. В этом состоит *тривиализация* горизонта как функции.

Вернемся к рассматриваемому примеру с конусами и проиллюстрируем сказанное. Какое сечение мы должны с проективной точки считать за окружность? Ответ: любое. *Какую прямую назначим горизонтом, такая плоскость сечения и будет считаться параллельной основанию*. Или наоборот: какое сечение назначим окружностью, такая прямая пересечения плоскости сечения и плоскости основания и будет горизонтом.

В самом деле, всякое правильно построенное перспективное изображение так устроено. Как получается, что смотря на эллипс, мы видим круг, смотря на трапецию, видим квадрат, а пересекающиеся прямые, которые, казалось бы, точно такие же, как и все остальные, которые можно начертить на листе бумаги, при правильно, с геометрической точки зрения, построенном изображении[22], воспринимаются как параллельные только лишь из-за того, что они пересекаются на другой обычной прямой – условном горизонте изображения? Эта оптическая «иллюзия» перестает таковой казаться, если понять ее геометрический смысл. Не всякий эллипс расправится в круг и не всякая трапеция в квадрат: чтобы мы увидели *внутри одной геометрии другую*, в эллипсе окружность, нужно, чтобы эта случайная прямая *геомет-*

---

[22] Пояснения, как должно производиться дальнейшее построение, если мы хотим назначить на роль горизонта какую-то прямую на бумаге, потребовало бы введения дополнительных комментариев и терминов. Ограничимся тут только некоторыми указаниями. Назначение на роль горизонта можно понимать в обычном, т.е. изобразительном смысле слова. Вопрос о том, как изобразить трапецию на рисунке так, чтобы она казалось квадратом, это вопрос построения. То есть он имеет конкретное геометрическое решение. Ясно, что параллельными на рисунке будут считаться все прямые, пересекающиеся на выбранной прямой. Но нам нужно определить не только параллельность, но и перпендикулярность. Для этого нам бы пришлось ввести определение инволюции на прямой и затем ее частный случай – абсолютную инволюцию. Мы не станем усложнять изложение дополнительными комментариями такого рода. Но достаточно понимать лишь то, что вопрос о перпендикулярности решается точно так же, как и другие перечисленные вопросы (какая прямая – горизонт, какие прямые параллельны, какое коническое сечение является окружностью), а именно: нам нужно назначать какую-то инволюцию абсолютной. Тогда соответствующие этому выбору прямые станут перпендикулярными. Из этого мы сможем определить, какая трапеция является квадратом, какой эллипс – окружностью. Изображение, построенное сообразно избранным в нем прямой и инволюцией на ней, развернется в узнаваемый мир, аналогичный нашему собственному. То есть трапеция *действительно* станет квадратом, мы будем ее *видеть* как квадрат.

рически выполняла функцию горизонта. Задать окружность или горизонт – это и значит ввести евклидов мир. Как только на рисунке назначена окружность, все дальнейшие построения уже определены, (почти) то же можно сказать о горизонте. Именно это назначение и все дальнейшие построения, на нем основанные, и «выправят» эллипс в окружность, введут метрику и «расправят» точки в согласии с единым радиусом.

Привычный нам мир окружностей и квадратов, мир, в котором существует ортогональное и параллельное, – это такой же условный мир, как мир изображения. Или иначе: *мир изображения столь же действителен, сколь и наш собственный*.

Утверждение № 3:

Геометрическим выражением глубины является гомоморфизм между проективной и евклидовой геометриями.

Глядя на изображение или же просто вдаль, мы «смотрим» сразу в двух режимах. Мы смотрим на эллипс, но видим его как окружность, смотрим на пересекающиеся прямые, но видим параллельные. Глубина образуется как прибавочное измерение из взаимодействия *двух* геометрических режимов. Что заставляет изобразительную плоскость углубляться? То есть какой геометрический аспект вводит мнимое дополнительное измерение в плоскость? Чтобы плоскость с эллипсами и трапециями вдруг развернулась вглубь и тем самым выправила эти формы до окружностей и квадратов, необходимо назначить какую-то из ее прямых на бесконечно удаленную и задать в ней перпендикулярность (см. предыдущую сноску), тогда эллипсы, соответсвующие назначенному горизонту, и трапеции, соответсвующие назначенной инволюции (см. предыдщую сноску) выправятся в окружности и квадраты.

Видеть одно в качестве другого (эллипс в качестве окружности) означает видеть сразу в двух геометрических режимах, каждый из которых является его тривиализацией (утверждения № 1, 2 этого шага). Поэтому эффект глубины не связан с особым статусом проективной геометрии, у нее нет какой-то особой геометрической привилегии[23]. Эффект связан с провалом – нельзя обозначить объект за один ход. Элемент принадлежит одной теории (бесконечно удаленная прямая), но работает как горизонт он в другой (в Евклидовой геометрии). Это поясняет, почему глубина является плохо и трудно артикулируемым объектом. Ее нельзя обозначить одной записью, одной

[23] Кроме одной, которой мы пользуемся здесь, но не упоминали ранее. Действительно у проективной геометрии есть одна «удобная» для нас особенность. Эту особенность сформулировал математик Артур Кэли в утверждении, что «проективная геометрия – это вся геометрия». Все основные геометрии являются подгеометриями проективной геометрии. То есть можно вложить как множество и построить инъективный гомоморфизм их преобразований. Это означает, что практически все геометрии могут быть выражены как частный случай проективной. Доказательство можно прочесть в кн.: *Сосинский А.Б.* Геометрии. М., 2017. С. 180–185. Поэтому не случайно, что такое использование сразу двух геометрий, на которое мы опираемся, задействует именно проективную геометрию. Но это лишь способствует тому, что мы можем рассматривать две теории сразу. Но использование проективной геометрии для формализации объекта, который не может быть выражен в одной теории, не исключительный случай в математике, где можно производить такие построения. В качестве примера можно привести работу Ж.-М. Вапперо (*Vappereau J.-M.* L'amour du tout aujourd'hui. 1995. URL: http://jeanmichel.vappereau.free.fr/textes/02.1%20Amour%20du%20tout%201ere%20partie.pdf (дата обращения: 23.02.2023)), где он использует две логики, чтобы записать предикат истины в том же языке, в котором он применяется.

теорией, она является тем, что существует на стыке, или тем, что позволяет нам переходить из одной теории к другой. Глубина является такого рода переводом. Глядя на картину, мы распознаем ее содержание, потому что совершаем такую геометрическую операцию.

В математическом смысле то, о чем здесь идет речь, называется *гомоморфизмом*. Евклидова плоскость как множество может быть вложена в проективную, а группа преобразований инъективно отображена в проективную. Глубина в феноменологическом описании Мерло-Понти и наше восприятие изображения геометрически могут быть выражены таким совмещением, т.е. *разворачиванием евклидового мира в проективном*. Этот стык мы и предлагаем мыслить как геометрическую теорию глубины, где каждая геометрия по отдельности будет тривиализацией, а сама глубина – стыком или переходом. С этим связана недоступность и дистанция, поскольку в одном режиме до горизонта не дойти (потому что его нет), а во втором прямая легко достижима, но горизонтом уже нет является.

Основной результат № 2:

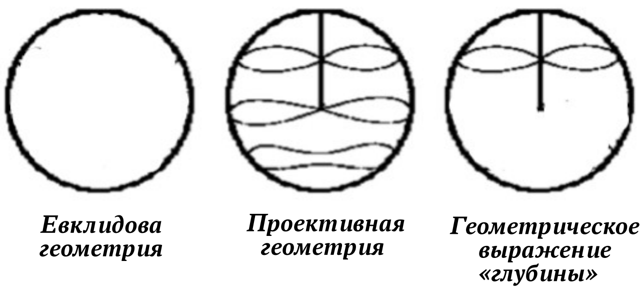


Рис. 8. Завершение построения

Итак, основным результатом этого шага является завершение построения геометрии глубины, или глубины как геометрического объекта (в нашем случае это одно и то же, по аналогии с тезисом Клейна и его перифразом – утверждения № 1, 2 из шага № 1). Поясним полученный результат, представленный на рис. 8 в качестве основного результата № 2.

На рисунке (рис. 8) изображены топологические модели евклидовой и проективной геометрий, а также модель полученного в ходе четырех шагов геометрического определения глубины. В первом случае мы видим обычный диск: топологически этот диск можно бесконечно растягивать или мыслить его как диск без края. Словом, тут представлена обычная вещественная плоскость.

Вторая фигура уже знакома нам. Это кросс-кэп (см. примере № 3 из шага № 2). С точки зрения глубины и горизонта, эта модель для нас обозначает, что плоскость пополнена бесконечно удаленной прямой и завершена, т.е. с точки зрения множества нам теперь хватает элементов для обозначения горизонта. Но мы не можем определить на нем, какая именная прямая должна стать горизонтом: может быть любая, т.е. никакая из них сама по себе.

Наконец, третья фигура – это гомоморфизм этих двух геометрий (утверждение № 3 из шага № 4). Итоговая запись глубины – это преобразования проективной плоскости в себя с одной закрепленной прямой. Мы убрали все преобразования, которые могли двигать или изменять одну прямую. С точки зрения операций, мы остаемся в евклидовой геометрии (Основной результат № 1). Но на уровне множества мы остаемся в проективной плоскости. У нас есть, таким образом, и прямая, и функция. На рисунке мы оставили обозначение только одной проективной прямой, имея в виду, что заданные преобразования не могут ее изменять.

«Расправление углов» не вопрос восприятия, назначение некой прямой на роль горизонта действительно переводит проективную геометрию в Евклидову, поэтому появляются окружности, параллельные прямые и другие элементы евклидова мира. Мы производим этот переход через сокращение преобразований (закрепление). Но можно произвести такой же переход через множество: можно «вырезать» любую одну прямую. Если мы так поступим, преобразования, которые могли двигать эту прямую, также упразднятся, поскольку просто не будет самой прямой. И если мы извлечем таким образом прямую, то пересекающиеся на ней прямые действительно станут параллельными, поскольку точки их пересечения исчезнут. И так весь мир «расправится» до необходимых форм. И это можно сделать в любом месте.

III. Заключение и выводы

Мы завершили построение, теперь попробуем кратко обозначить некоторые из выводов, которые мы можем сделать на основании проделанных шагов.

(1) Наше построение показало, что описываемый Мерло-Понти феномен глубины может быть выражен геометрически (основной результат шага № 4).

(2) В результате шага № 3 мы узнали, что глубина есть не что иное, как «ширина, видимая в профиль», т.е. евклидова геометрия. Глубина – не перспективное сокращение и искажение, как могло бы показаться. Напротив, это их упразднение. Благодаря геометрическому анализу мы смогли прийти к противоположному утверждению.

(3) В примере № 1 шага № 4 мы показали, какое геометрическое значение имеет описываемый Мерло-Понти «акт расправления углов». Эффект расправления производится закреплением некой прямой. В шаге № 3 мы показали, что полученная группа будет изоморфной группе евклидовой.

(4) Закрепление прямой есть геометрическое выражение «включения взгляда в объект». Это следует уже из того, что этими именами: «закрепление прямой» и «включение взгляда в объект» называется одно и то же – «расправление углов». Включение взгляда, т.е. переживание визуальных данных сознанием (то, что исследуют феноменологи), принимает некую данную прямую (линию горизонта) за отсутствующую, мнимую. Или, что то же самое, вводит внутрь одного геометрического режима (проективного) другой геометрический режим – евклидов (потому что появляется параллельность).

(5) Мы не только смогли предложить геометрическую запись глубины, но и показали, с чем была связана трудность записи. Трудность записи связывались нами в первой части статьи с тем, что глубина не может быть представлена как объект, но только как то, что объекты структурирует. И действительно, если просто добавить отсутствующий, но структурирующий элемент, то глубина тривиализируется. Теперь, когда мы знаем, что глубина связана с введением

евклидового мира в проективный, то легко понять, в каком смысле именно отсутствие некоторого элемента удерживало эту структуру. Если мы из любого места кросс-кэпа изымем прямую, то получим евклидову плоскость. Поскольку у нас не будет одной прямой, прямые, которые не пересекались, станут параллельными, ведь точки их пересечения просто исчезнут. И далее введутся все соответствующие элементы евклидовой геометрии. Следовательно, эта структура удерживается отсутствием этой прямой. Но из-за этого отсутствия этот элемент гетерогенен тому, до чего мы можем «дотянуться» доступными нам преобразованиями. Поэтому горизонт и структурирует, и недоступен, и не может быть представлен как объект, т.е. как элемент доступного множества. А если мы захотим «дотянуться» до него, введя его как элемент, то мы получим кросс-кэп, в котором дотянемся до этого элемента, но горизонтом он уже не будет. Но мы обошли эту трудность. Мы ввели этот элемент на уровне множества, но убрали на уровне группы, в том смысле, что элемент есть, но неподвижен, недоступен. Таким образом, мы записали без тривиализации именно глубину. Элемент на другом уровне продолжает быть гетерогенным, задающим порядок глубины.

(6) Проблема геометрического выражения феномена глубины, на которой настаивает Мерло-Понти, действительно имеет место, поскольку, как это было показано, ни одна из геометрий не является выражением глубины в полном смысле слова. Поскольку в одной есть ее эффект (евклидова геометрия), а в другой то, что этот эффект производит, или то, на стирании чего он держится. Таким образом, глубина оказывается переходным объектом, который переводит одну геометрию в другую.

(7) «Сам рисунок стремится к глубине». Как писал и Марьон, углубление изображения не иллюзия, но действительно «один мир внутри другого». Теперь совсем легко увидеть, что изображение – это другой геометрический режим. Смотреть на изображение, т.е. видеть сообразно его перспективе, означает перезакрепить прямую.

(8) Из этого также следует ясное описание гетерогенности изобразительной глубины по отношению к собственной вещественной основе и физическому пространству, в котором эта основа ее располагает. Изобразительное содержание действительно находится не в том геометрическом порядке, в котором находится его материальный носитель. Вовлекаясь в изображение, мы принимаем его горизонт за бесконечно удаленную прямую. Следовательно, мы отменяем наш «режим», плоскость углубляется и начинает втягивать в эту глубину наш собственный мир, отменяя его внутреннюю логику.

(9) Из пункта (6) также следует, что между изображением и «действительностью» нет онтологического разрыва. Что намечает онтологическую перспективу развития полученных результатов.

Список литературы

Алексеев В.Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: МЦНМО, 2018. 213 с.
Жегин Л.Ф. Язык живописного произведения. М.: Искусство, 1970. 232 с.

Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа») // Об основаниях геометрии / Ред. и вступ. ст. А.П. Нордена. М.: Гостехиздат, 1956. С. 399–434.

Марион Ж.-Л. Перекрестья видимого / Пер. с фр. Н.Н. Сосна. М.: Прогресс-Традиция, 2010. 176 с.

Мерло-Понти М. Феноменология восприятия / Пер. с фр. под ред. И.С. Вдовиной и С.Л. Фокина. СПб.: Ювента: Наука, 1999. 608 с.

Панофский Э. Перспектива как «символическая форма». Готическая архитектура и схоластика / Пер. с нем. И.В. Хмелевских, Е.Ю. Козиной; пер. с англ. Л.Н. Житковой. СПб.: Азбука-Классика, 2004. 336 с.

Раушенбах Б.В. Геометрия картины и зрительное восприятие. СПб.: Азбука-Классика, 2002. 320 с.

Сосинский А.Б. Геометрии / Пер. с англ. Б.Р. Френкина. М.: МЦНМО, 2017. 263 с.

Сосинский А.Б. Мыльные пленки и случайные блуждания. М.: МЦНМО, 2012. 16 с.

Emmer M. Soap Bubbles in Art and Science: From the Past to the Future of Math Art // Leonardo. 1987. Vol. 20. No. 4: 20th Anniversary Special Issue: Art of the Future: The Future of Art. P. 327–334.

Gaboury J. Image Objects. An Archaeology of Computer Graphics. Cambridge: MIT Press, 2021. 312 p.

Henderson L.D. The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art. 2nd ed. Cambridge (MA): MIT Press, 2013. 729 p.

Ivins W.M. Art and Geometry: A Study in Space Intuitions. Cambridge (MA): Harvard University Press, 1946. 127 p.

Küchler S. Why Knot? Towards a Theory of Art and Mathematics // Beyond Aesthetics. Art and the Technologies of Enchantment / Ed. by C. Pinney and N. Thomas. Oxford: Berg, 2001. P. 57–78.

Robbin T. Shadows of Reality: The Fourth Dimension in Relativity, Cubism, and Modern Thought. New Haven: Yale University Press, 2006. 137 p.

The Visual Mind: Art and Mathematics / Ed. by M. Emmer. Cambridge: MIT Press, 1993. 315 p.

Vappereau J.-M. L'amour du tout aujourd'hui. Topologie en Extension, 1995. URL: http://jeanmichel.vappereau.free.fr/textes/02.1%20Amour%20du%20tout%201ere%20partie.pdf (дата обращения: 23.02.2023).

Geometry of the unspeakable: experience of one construction

Nigina R. Sharopova

Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences. 12/1 Goncharnaya Str., Moscow, 109240, Russian Federation; e-mail: nrsharopova@gmail.com

Picture geometry is often regarded as an area of technical knowledge that accompanies or provides useful information for basic research on visual culture and almost never as a methodological one. Despite the historical and conceptual connections between mathematics and the visual, even a basic geometric competence is by no means a common of image and visual culture researchers. At the same time, the overwhelming majority of this kind of work belong to the field of technical knowledge, the history of mathematics, or positivism based theories; in other words, they do not address the most important issues for humanities research. Rare non-technical works in this area do not find due recognition and dissemination among a wider community of specialists. The article offers the main result of the research, the subject of which was pictorial depth. Pictorial depth is the version of the specific experience of distance with which the image is traditionally associated. The problem of distance is a classical area of philosophical reflection on the image. The article presents an attempt to geometrically express one of its versions, namely pictorial and visual depth. At the same time, the important dimension of inaccessibility and heterogeneity is preserved, that is, the experience of depth is not reduced to visual data or the literal geometry of a flat picture. By constructing a geometrically object that can be considered depth, it is possible to extract intuitively non-obvious properties that would not be available through direct analysis of experience and other methods of naked reflection. The article presents only some of the findings obtained during the study.

Keywords: image, perspective, projective geometry, phenomenology, M. Merleau-Ponty, J.-L. Marion

For citation: Sharopova, N.R. "Algebra nevyrazimogo: opyt odnogo postroeniya" [Geometry of the unspeakable: experience of one construction], *Filosofskii zhurnal / Philosophy Journal*, 2023, Vol. 16, No. 4, pp. 158–179. (In Russian)

References

Alekseev, V.B. *Teorema Abelia v zadachakh i resheniiakh* [Abel's Theorem in Problems and Solutions]. Moscow: MTSNMO Publ., 2018. 213 pp. (In Russian)

Emmer, M. "Soap Bubbles in Art and Science: From the Past to the Future of Math Art", *Leonardo*, 1987, Vol. 20, No. 4: 20th Anniversary Special Issue: Art of the Future: The Future of Art, pp. 327–334.

Emmer, M. (ed.) *The Visual Mind: Art and Mathematics*. Cambridge: MIT Press, 1993. 315 pp.

Gaboury, J. *Image Objects. An Archaeology of Computer Graphics*. Cambridge: MIT Press, 2021. 312 pp.

Henderson, L.D. *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art,* 2nd ed. Cambridge, MA: MIT Press, 2013. 729 pp.

Ivins, W.M. *Art and Geometry: A Study in Space Intuitions*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1946. 127 pp.

Klein, Ph. "Sravnitelnoe obozrenie noveishikh geometricheskikh issledovanii ('Erlangenskaia programma')" [Comparative Review of the Latest Geometric Research ('Erlangen Program')], *Ob osnovaniiakh geometrii* [On the Foundations of Geometry], ed. by A.P. Norden. Moscow: Gostekhizdat Publ., 1956. pp. 399–434. (In Russian)

Küchler, S. "Why Knot? Towards a Theory of Art and Mathematics", *Beyond Aesthetics. Art and the Technologies of Enchantment*, ed. by C. Pinney and N. Thomas. Oxford: Berg, 2001, pp. 57–78.

Marion, J.-L. *Perekrest'ya vidimogo* [The Crossing of the Visible], trans. by N.N. Sosna. Moscow: Progress-Tradiciya Publ., 2010. 176 pp. (In Russian)

Merleau-Ponty, M. *Fenomenologiya vospriyatiya* [Phenomenology of Perception], trans. by I.S. Vdovina and S.L. Fokin. St. Petersburg: Yuventa Publ.; Nauka Publ., 1999. 608 pp. (In Russian)

Panofsky, E. *Perspektiva kak 'simvolicheskaia forma'. Goticheskaia arkhitektura i skholastika* [Perspective as a 'symbolic form'. Gothic architecture and scholasticism], trans. by I.V. Khmelevskikh, E.Yu. Kozina and L.N. Zhitkova. St. Petersburg: Azbuka-Klassika Publ., 2004. 336 pp. (In Russian)

Raushenbakh, B.V. *Geometriia kartiny i zritelnoe vospriiatie* [Geometry of the painting and visual perception]. St. Petersburg: Azbuka-Klassika Publ., 2002. 320 pp. (In Russian)

Robbin, T. *Shadows of Reality: The Fourth Dimension in Relativity, Cubism, and Modern Thought*. New Haven: Yale University Press, 2006. 137 pp.

Sosinsky, A.B. *Geometrii* [Geometries], trans. by B.R. Frenkin. Moscow MTSNMO Publ., 2017. 263 pp. (In Russian)

Sosinsky, A.B. *Mylnye plenki i sluchainye bluzhdaniia* [Geometry of Soap Films and Random Walks]. Moscow: MTSNMO Publ., 2012. 16 pp. (In Russian)

Vappereau, J.-M. *L'amour du tout aujourd'hui.* Topologie en Extension, 1995 [http://jeanmichel.vappereau.free.fr/textes/02.1%20Amour%20du%20tout%201ere%20partie.pdf, accessed on 23.02.2023].

Zhegin, L.F. *Yazyk zhivopisnogo proizvedeniya* [The Language of Paiting]. Moscow: Iskusstvo Publ., 1970. 232 pp. (In Russian)