Философский журнал
2022. Т. 15. № 3. С. 113–124
УДК 161.26

The Philosophy Journal
2022, Vol. 15, No. 3, pp. 113–124
DOI 10.21146/2072-0726-2022-15-3-113-124

ЛОГИКА И ФИЛОСОФИЯ

А.М. Павлова

ЗНАНИЕ И ЕГО ДИНАМИКА В ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКЕ[*] [**]

Павлова Александра Михайловна – аспирант. Венский технический университет (TU Wien). Австрия, 1040, г. Вена, Favoritenstraße 11; инженер-исследователь. Институт философии Санкт-Петербургского государственного университета. Российская Федерация, 199034, г. Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5; e-mail: pavlova.alex22@gmail.com

В настоящей статье рассматривается проблема суперпозиции дедуктивных и познавательных установок в контексте интуиционистской логики. Изучаются предпосылки и способы моделирования изменения знания в рамках эпистемической логики. Основной акцент сделан на различии в понимании истинности и знания в классической и интуиционистской логике. Показано, что альтернативное понимание истинности в интуиционистской логике влечет за собой иное понимание модальности знания, нежели в классической логике.

Ключевые слова: интуиционизм, логическая семантика, динамическая логика, эпистемическая логика, многообразие агентов

Для цитирования: *Павлова А.М.* Знание и его динамика в интуиционистской логике // Философский журнал / Philosophy Journal. 2022. Т. 15. № 3. С. 113–124.

Введение

Идея многообразия и плюрализма в культуре и науке является одной из центральных в последние десятилетия. Логико-философский дискурс также не мог обойти ее стороной, что нашло свое отражение в изучении познавательных установок и особенностей различных агентов, которые можно обобщить терминами «эпистемические установки» и «эпистемические состояния» агентов. Таким образом, проблема эпистемических состояний агентов, таких как знание, убеждение, осведомленность и др., внимательно изучается философами и логиками последних десятилетий. Существует обширная литература, посвященная как анализу статических состояний, так и их динамике, т.е. изменению под влиянием новой информации. Подробное обсуждение логики как теории агентности и взаимодействия можно

[*] Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-011-00485 «Делиберативная аргументация между рассуждением и действием».

[**] Автор выражает благодарность анонимному рецензенту за полезные замечания и комментарии.

найти в работах Й. ван Бентема[1] и Ф. Лью[2]. Одним из наиболее популярных подходов к анализу агентных знаний и убеждений является логико-философский, в рамках которого эпистемические понятия моделируются в рамках ряда специально разработанных логических формализмов, что позволяет применять методы математической логики. Преимуществом данного подхода является возможность выявить неочевидные свойства и следствия из того или иного понимания эпистемических модальностей, а также пределы их формализуемости. Очевидно, что такие понятия, как, например, знание или убеждение, не являются однозначно определимыми и представляют некоторое затруднение для философского анализа. Тем не менее именно формализация помогает выявить тот набор следствий, который сопутствует тому или иному способу определить данные понятия. Это особенно важно при создании формальных моделей взаимодействия между агентами, например, в аргументативном дискурсе.

В рамках логико-философского подхода одним из наиболее распространенных и популярных способов формальной репрезентации знаний и убеждений агентов является семейство *эпистемических логик*, где понятия знания и убеждения формализуются как модальности. Как правило, данные логики представляют собой расширения либо пропозициональных логик, либо логик первого порядка и интерпретируются на шкалах Крипке. Стоит отметить, что семантика возможных миров не является единственно возможной: существует также окрестностная семантика, а также теоретико-игровой подход (как и для более слабого варианта, а именно *минимальной логики*[3]). Таким образом, семейство эпистемических логик представляет собой подмножество модальных логик. Существуют, однако, и иные подходы моделирования эпистемических состояний агентов, например, средствами многозначных логик (такой подход используется в работах Е. Кубышкиной и Д.В. Зайцева[4]). Тем не менее в рамках данной работы будет рассматриваться формализация эпистемических состояний агентов с помощью модальной логики.

Основной вопрос, рассматриваемый в данной статье, можно сформулировать следующим образом: как взаимосвязаны интерпретация истинности и знания в рамках эпистемических формализмов, основанных на неклассических логиках? В качестве примера таких формальных систем будет рассмотрена эпистемическая интуиционистская логика и некоторые ее простейшие динамические расширения.

---

1 *van Benthem J.* Logical Dynamics of Information and Interaction. Cambridge; N.Y., 2010; *van Benthem J., Liu F.* Diversity of Logical Agents in Games // Philosophia Scientiæ. 2004. Vol. 8 (2). P. 165–181.

2 *Liu F.* Diversity of Agents and their Interaction // Journal of Logic, Language and Information. 2008. Vol. 18 (1). P. 23–53.

3 *Pavlova A.* Dialogue games for minimal logic // Logic and Logical Philosophy. 2021. Vol. 30. P. 281–309.

4 *Kubyshkina E., Zaitsev D.* Rational Agency from a Truth-Functional Perspective // Logic and Logical Philosophy. 2016. Vol. 25 (4). P. 499–520.

Компетенции агентов и формальные системы

Различные агенты могут иметь не только несовпадающие убеждения и знания о фактах окружающего мира, но также и неодинаковые способности (такие как память, способность делать выводы, наблюдательность и другие) по оценке фактов и в построении рассуждений. Можно выделить несколько типов[5] компетенций (или, иначе говоря, презумпций), которыми могут обладать рациональные агенты. Однако данные компетенции не являются полностью независимыми друг от друга.

В зависимости от того, каким образом модальные операторы знания и убеждения определяются в формальной семантике (в случае семантики возможных миров, каковы, например, свойства фреймов, на которых тот или иной оператор определяется), свойства соответствующих моделируемых понятий будут различными. В зависимости от того, какие цели преследуют исследователи, будет различаться и выбор формализма. Так, например, одной из самых часто встречаемых логик, использующихся в качестве базовой для моделирования *знания*, является модальная логика S5, предложенная еще К.И. Льюисом совместно с Г. Лангфордом[6] и полная относительно транзитивных, симметричных и рефлексивных (что вместе дает отношение эквивалентности) фреймов.

В таком случае знание трактуется как необходимо *«истинное обоснованное убеждение»* (*justified true belief*). Здесь подразумевается древняя идея о том, что знание не может быть ложным. Стоит отметить, что система S5 наиболее популярна среди исследователей, занимающихся математическим и в особенности компьютерным моделированием логических рассуждений. В таком случае модальный оператор *«бокс»* (в алетической модальной логике интерпретируемый как оператор необходимости) $\Box A$ (*«A известно»*) трактуется как оператор знания, обладающий всеми свойствами «бокса» из системы S5. С одной стороны, данная логика весьма удобна в силу своей простоты и свойств, но, с другой – ведет к ряду нежелательных парадоксов, наиболее известным из которых является *парадокс всеведения*, согласно которому «если A доказуемо, то A известно», что очевидным образом противоречит как нашей повседневной практике – иначе нам были бы известны, к примеру, уже все теоремы арифметики, – так и нашим представлениям о прогрессе и развитии знания. В основе данного парадокса лежит базовая аксиома любой *нормальной модальной логики*, а именно аксиома K: $\Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$. Как видно, если известно, что из A следует B, и известно A, то автоматически известно B. История развития эпистемической логики, в особенности в рамках философского анализа знания, представляет собой борьбу с парадоксом всеведения и иными эпистемическими парадоксами[7] и поиски более подходящих формализмов. Тем не менее даже более слабые системы, как правило, являются расширениями классической логики. Однако если мы принимаем за базовую логику систему более слабую, чем классическая, то и понятия знания и убеждения будут трактоваться в них иначе. Наиболее ярким примером такой суперпозиции является интуиционистская эпистемическая логика.

---

[5] *Лисанюк Е.Н., Павлова А.М.* Логические аспекты многообразия агентов // Известия Уральского федерального университета. Сер. 3: Общественные науки. 2016. Т. 11. № 4 (158). С. 45–60.

[6] *Lewis C.I., Langford C.H.* Symbolic Logic. N.Y., 1932.

[7] *Egre P.* Propositional Attitudes and Epistemic Paradoxes. PhD thesis. Paris, 2004.

Основной целью данной статьи является анализ суперпозиции дедуктивных и эпистемических установок агентов на примере конкретного случая, а именно динамической эпистемической интуиционистской логики, а также анализ эпистемических аспектов ее немодального фрагмента (т.е. интуиционистской пропозициональной логики).

Интуиционистская логика и вопрос семантики

Интуиционизму как философскому направлению в основаниях математики посвящено множество работ. Было предпринято множество попыток обосновать превосходство интуиционистской математики[8] (даже с точки зрения игрового подхода к логике)[9]. Ввиду того, что даже отношение между интуиционизмом в философии математики и формальными интуиционистскими системами представляется проблематичным, дискуссия об основаниях математики выходит за рамки данного исследования. Основной интерес для нас представляет интуиционистская логика как формальная дедуктивная система и соответствующее ей множество семантик: семантика Крипке, алгебраическая семантика, а также теоретико-игровой подход. Несмотря на то, что с технической точки зрения интуиционистское исчисление и соответствующие семантики также хорошо изучены, вопрос изменения информации и эпистемических особенностей интуиционистски настроенных агентов (будем для краткости называть их интуиционистскими агентами) до сих пор не исследован. Мы стремимся показать, что при добавлении динамических операторов, изменяющих эпистемические состояния агентов, интуиционистская логика может претендовать на статус логики, моделирующей постепенный прогресс в области знаний. Мы продемонстрируем данную гипотезу на примере нескольких формальных систем: эпистемической интуиционистской логики, предложенной С. Артемовым и Т. Протопопеску[10], а также некоторых ее динамических расширений.

Для начала обратимся к нашей базовой системе, а именно пропозициональной интуиционистской логике (иногда обозначаемой IPC – от английского intuitionistic propositional calculus – в переводе: «интуиционистское пропозициональное исчисление»). Общеизвестно, что в интуиционистском исчислении высказываний, в отличие от классического, не имеют места закон исключенного третьего $A \lor \neg A$ (*tertium non datur*) и правило снятия двойного отрицания $\neg\neg A \vdash A$. Существует ряд аргументов в пользу использования именно интуиционистского исчисления в основаниях математики, но наиболее ярким примером преимуществ интуиционистской логики являются рассуждения о бесконечных объектах. Нас же интересует то, каким образом можно интерпретировать само интуиционистское исчисление как с помощью логической семантики, так и с содержательной точки зрения.

---

8 *Brouwer L.E.J.* Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1924. Bd. 154. S. 1–7.

9 *Lorenzen P., Lorenz K.* Dialogische Logik. Darmstadt, 1978.

10 *Artemov S., Protopopescu T.* Intuitionistic epistemic logic // The Review of Symbolic Logic. 2016. Vol. 9. No. 2. P. 266–298.

Помимо роли интуиционизма в философии математики, немаловажны также формальные свойства данной системы, такие как:

(1) наличие аналитических дедуктивных систем, т.е. таких, в которых соблюдается *свойство подформульности*, когда посылки каждого правила исчисления состоят из подформул заключения, что имеет большое значение для автоматизации вывода и в целом повышает эффективность поиска вывода;

(2) *дизъюнктивное свойство* (*disjunctive property*): т.е. если A ∨ B является тавтологией, то тавтологией является также одна из формул A или B;

(3) *свойство финитной аппроксимируемости* (*finite model property*), или, иначе, полнота относительно конечных моделей, которое относится к интерпретации интуиционизма на моделях Крипке. Данное свойство предполагает, что для любой формулы, не общезначимой в данной логике, верно, что она фальсифицируема в какой-либо конечной модели данной логики.

Кроме того, к настоящему моменту было предложено множество теоретико-игровых интерпретаций интуиционистской логики, в основном для выявления общезначимых (*valid*) формул, например (1) диалоговая логика П. Лоренцена[11], в рамках которой отстаивается идея о том, что интуиционизм представляет собой наиболее естественную и «правильную» логику; (2) игра, предложенная И. Межировым[12], и некоторые другие[13]. Идея расширения данных игр для интуиционистской логики на модальный уровень не только представляется перспективной в чисто техническом плане, но также может пролить свет на некоторые аспекты интуиционистской эпистемологии.

Одной из наиболее популярных трактовок интуиционистской логики является так называемая семантика *BHK,* название которой является аббревиатурой от английского Brouwer-Heyting-Kolmogorov[14], т.е. имен исследователей, чьи работы лежат в основании интуиционизма: Л.Э.Я. Брауэра, А. Гейтинга и А.Н. Колмогорова. В рамках данной неформальной семантики истинность формулы A понимается как наличие доказательства данной формулы *A*. В свою очередь, ложность формулы понимается следующим образом: допущение о наличии доказательства формулы A ведет к противоречию. Соответственно, мы не можем заключить, что формула ложна, только лишь исходя из того, что мы до сих пор не нашли ее доказательства. Ложность формулы требует отдельного доказательства путем сведения к абсурду. Таким образом, мы получаем дизъюнктивное свойство, а именно: чтобы построить доказательство дизъюнкции A ∨ B, нужно иметь доказательство хотя бы одного из дизъюнктов (или A, или B). В связи с этим пониманием дизъюнкции перестает быть аксиомой закон исключенного третьего (A∨¬ A). Ниже приведем определения истинности логических связок в рамках семантики *BHK*:

---

11 *Lorenzen P., Lorenz K.* Op. cit.

12 *Межиров И.В.* Игровая семантика для Int и Grz. Дипломная работа. М., 2006.

13 *Urzyczyn P.* Intuitionistic Games: Determinacy, Completeness, and Normalization // Studia Logica. 2016. Vol. 104. No. 5. P. 957–1001.

14 *van Dalen D., Troelstra A.* Constructivism in Mathematics: An Introduction. Vol. I. Amsterdam; N.Y.; North-Holland, 1988.

(4) Доказательство формулы $A \wedge B$ состоит из доказательства A и доказательства B. В более строгом смысле это можно понимать как пару $\langle\alpha, \beta\rangle$, где α – это доказательство A, а β – это доказательство B.

(5) Доказательство формулы $A \vee B$ состоит из доказательства A или доказательства B. В рамках вычислительной семантики *BHK* (варианта формального представления семантики *BHK*) это можно понимать как пару $\langle\alpha, \beta\rangle$, где $\alpha \in \{0,1\}$, и если $\alpha=0$, то β – это доказательство формулы A, а если $\alpha=1$, то β – это доказательство формулы B.

(6) Доказательство формулы $A \rightarrow B$ представляет собой процедуру (построение), которая берет в качестве входных данных доказательство A и возвращает доказательство B в качестве ответа. Можно также считать, что доказательство формулы $A \rightarrow B$ является некоторой функцией f, которая трансформирует доказательство формулы A в доказательство формулы B. Можно даже говорить о редукции проблемы поиска доказательства формулы B к доказательству формулы A, что является весьма распространенным методом в рамках ряда наук, например в информатике. То есть здесь речь идет об общем методе решения проблемы/доказательства B на основании уже имеющегося решения/доказательства A.

(7) Формула вида $\neg A$ трактуется как сокращение формулы $A \rightarrow \bot$, где $\bot$ – это недоказуемое утверждение (как правило, под $\bot$ понимается противоречие и отдельно вводится условие, что нельзя построить доказательство противоречия).

Следует отметить, что трактовка А.Н. Колмогорова в целом схожа с указанной выше, однако она сформулирована в терминах задач и решений, при этом предлагается рассматривать каждую формулу интуиционистской логики не как утверждение, а как проблему. Под проблемой подразумевается своего рода требование указать или построить некоторый объект, подчиненный тем или иным заранее заданным условиям.

Таким образом, можно говорить об имплицитно содержащемся эпистемическом[15] аспекте интуиционистской логики в рамках *BHK*-семантики. Такая трактовка, конечно, зависит от понимания того, что значит *наличие доказательства*. Если принять ту точку зрения, согласно которой доказательство есть в наличии, когда оно построено и представлено некоторому агенту, то в таком случае мы можем считать, что истинность некоторой формулы в рамках интуиционистской логики зависит от эпистемических состояний агентов, а именно от знания доказательства. В таком случае мы можем говорить о динамике изменений эпистемических состояний агентов уже в рамках пропозициональной интуиционистской логики, даже не обращаясь к ее модальному фрагменту. Стало быть, нужно понять, что будет означать введение модального оператора публичного анонсирования (*public announcement operator*) в данном контексте, чтобы такое введение было осмысленным. По аналогии с классической динамической эпистемической логикой можно было бы ввести два различных оператора, соответствующие алетическим модальностям $\Diamond$ и $\Box$, а именно $\langle !A\rangle$ и $[!A]$. В классической модальной логике данные операторы являются дуальными; как правило, в качестве примитивного, т.е. несводимого к уже имеющимся связкам и операторам, вводят оператор $\Box$, а $\Diamond$ определяется как $\neg\Box\neg$.

[15] То есть связанном со знанием.

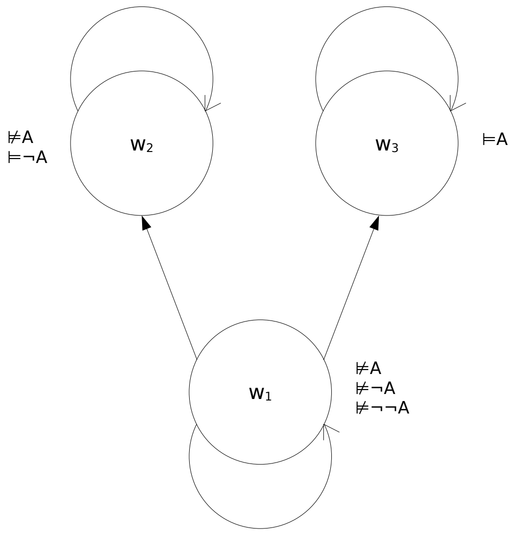
Однако в рамках интуиционистской модальной логики данные операторы более не являются взаимовыразимыми. Как же следует понимать такое обновление? Классическое понимание публичного анонсирования как предъявления истинной формулы непогрешимым источником в данном случае требует пояснения ввиду специального понимания истинности в интуиционизме. Публичное анонсирование может пониматься двояко:

1. Объявление формулы, истинной в классическом смысле, т.е. без предъявления доказательства. В силу того, что классическая истинность выразима в интуиционистской системе через двойное отрицание, т.е. $\neg\neg A$: «формула A истинна (не может быть ложной), но отсутствует доказательство», такое обновление будет осмысленным, хоть и слабым.
2. При публичном анонсировании предъявляется не только истинная формула, но также и доказательство данной формулы.

Ниже мы рассматриваем второй вариант, когда предъявляется также и доказательство формулы. Таким образом, публичное анонсирование представляет собой один из простейших способов трансформации модели.

В качестве семантики интуиционистской логики высказываний будет рассматриваться семантика возможных миров Крипке. Формально модель – это кортеж $\langle W, R, \upsilon \rangle$, состоящий из W непустого множества возможных миров, R отношения достижимости на них, а также υ функции оценки. В семантике для интуиционистской логики также присутствуют дополнительные требования к моделям, а именно: отношение достижимости должно быть *частично упорядоченным*, т.е. *транзитивным*, *рефлексивным* и *антисимметричным*; а также предъявляется требование *монотонности к функции оценки*, т.е. если произвольная пропозициональная переменная истинна в некотором мире w_i, то она также истинна в любом мире w_j, таком что $w_i \leq w_j$ (т.е. мир w_j достижим из мира w_i). Из этого также следует *монотонность отношения вынуждения*, т.е. вышеуказанное требование верно для любых формул, включая модальные.

В случае введения оператора публичного анонсирования в классической логике происходит следующая трансформация модели: при анонсировании некоторой формулы A все миры, в которых A не истинно, удаляются. Однако для классической логики это то же самое, что сказать, что удаляются все миры, где истинно $\neg A$ (по определению). Однако в интуиционистской логике такая эквивалентность определений пропадает. Соответственно, существует по крайней мере *два* различных способа трансформировать модель: (1) удалять все миры, в которых истинно $\neg A$, т.е. где A ведет к противоречию $A \rightarrow \perp$; (2) удалять миры, в которых неверно, что A истинно, т.е. такие w, что $w \not\models A$. Если мы считаем, что анонсировать A предполагает также предъявить доказательство A, тогда мы должны с необходимостью выбрать вариант (2), так как тогда миры, в которых у агента нет доказательства формулы A, не соответствуют ситуации, в которой A было предъявлено с доказательством. Возникает вопрос: существует ли интерпретация публичного анонсирования для варианта (1), совместимая с *BHK*-семантикой? Наиболее очевидным ответом кажется анонсирование формул с двойным отрицанием в качестве основных логических операторов, т.е. вида $\neg\neg A$. Однако на деле существует такая ситуация, где при анонсировании формулы вида $\neg\neg A$ мы удалим не только мир w_2, но также и w_1:



Можно предложить следующую интерпретацию варианта (1), когда при публичном анонсировании формулы A удаляются только те миры, в которых истинно ¬A: анонсирование носит классический характер, т.е. сообщается, что A истинно, но не приводится доказательство, тогда миры, в которых ⊭A, ⊭¬A, остаются, так как у агента нет доказательства A.

В случае если мы принимаем вариант (2), т.е. остаются только те миры, в которых анонсируемая формула истинна, тогда получившуюся логику можно редуцировать к интуиционистской логике без обновления, так как $\langle !A\rangle B \leftrightarrow A \wedge B$, а также оператор [!A]B вырождается в $\neg A \vee (A \wedge B)$, где $\langle !A\rangle B$ читается как «после некоторого истинного (с предъявлением доказательства) анонсирования A истинна формула B (присутствует доказательство формулы B)», а [!A]B понимается как «после любого анонсирования A истинна формула B (присутствует доказательство формулы B)». Разница заключается в том, что $\langle !A\rangle B$ истинно (в смысле наличия доказательства) тогда и только тогда, когда A истинно, в то время как [!A]B истинно при истинном ¬A. Очевидно, что при таком определении бокса в мирах, в которых A не истинно, но также не является истинным ¬A, также ложно [!A]B. Таким образом, можно ввести альтернативное определение: $M, w \models [!A] * B$, если и только если $M, w \models \neg A$ или $M, w \models B$. Такой оператор представляет больший интерес, так как его нельзя свести к формуле пропозициональной интуиционистской логики, соответственно, он представляет собой неконсервативное ее расширение.

Интуиционистская эпистемическая логика и обновление информации

Вопрос о добавлении оператора знания к интуиционистской логике рассматривался в ряде работ, и к нему существует несколько альтернативных подходов. Нам представляется наиболее интересной система IEL (от англ. Intuitionistic Epistemic Logic, т.е. «интуиционистская эпистемическая логика»), предложенная С. Артемовым[16] и Т. Протопопеску[17]. Система IEL является расширением пропозициональной интуиционистской логики путем добавления оператора знания, обозначаемого **K**, так что **K**A означает, что агент знает, что A. Данная система и ее неформальная интерпретация наилучшим образом вписываются в рамки вышеуказанной *BHK*-семантики, описанной в предыдущем разделе. Каким же образом трактуется знание в данной интуиционистской системе? Так как истинность немодальный формулы предполагает наличие доказательства, то это уже предполагает знание не только об этой формуле, но и о способах ее конструктивно доказать. В связи с этим интуиционистское знание ведет себя в значительной степени иначе, нежели модальность знания в классической логике. Предлагается следующее прочтение модальной формулы **K**A: *«Верифицировано (проверено), что A выполняется интуиционистски, т.е. что существует доказательство A, не обязательно указанное в процессе проверки»*. Было предложено следующее эпистемическое ВНК-условие, регулирующее оператор знания **K**:

(8) Доказательство формулы **K**A состоит в неоспоримом свидетельстве проверки (верификации) того, что существует доказательство A.

Можно привести различные примеры использования такого оператора: *доказательство с нулевым разглашением* (zero-knowledge proof), когда доказывающий дает нам ответ, что рассматриваемое утверждение истинно, без предоставления доказательства. Простым примером такого подтверждения может служить использование компьютерной программы, корректность которой доказана (т.е. доказано, что программа не совершает ошибок) и которая выдает только ответы «да» или «нет» на вопрос о доказуемости некоторой формулы. Таким образом, мы знаем, что формула истинна, и, более того, имеем подтверждение, свидетельство (а значит, интуиционистское знание сильнее, чем классическая истинность), но не располагаем ее доказательством. Другим примером может служить *свидетельство авторитета*, которое применяется даже в науке (мы можем знать, что теорема верна, не имея возможности воспроизвести ее доказательство).

Идея о том, что знание соответствует существованию проверки для некоторой рассматриваемой формулы, приводит к определенным условиям, накладываемым на оператор **K**, отличным от стандартного классического описания. Получается, что интуиционистская истинность формулы A сильнее, чем интуиционистское знание A. Самой слабгй в данном случае оказывается классическая истинность формулы A. Отсюда следует, что $\models A \rightarrow \mathbf{K}A$, но не наоборот (т.е. $\not\models \mathbf{K}A \rightarrow A$). При этом интуиционистское знание влечет классическую истинность, которая может быть выражена с помощью двойного отрицания $\models \mathbf{K}A \rightarrow \neg\neg A$[18].

Как и в случае с обновлением информации в пропозициональной интуиционистской логике, у нас возникает два различных варианта изменения модели. Однако следует понимать, что в случае эпистемической логики в модели присутствует не одно отношение достижимости, а два. Второе отношение, обозначаемое символом E, соответствует модальности знания. Множество отношений E является подмножеством отношений R

[16] *Artemov S., Protopopescu T.* Op. cit.

[17] *Protopopescu T.* Three Essays in Intuitionistic Epistemology. PhD thesis. N.Y., 2016.

[18] Если же убрать последнее требование, то получится система IEL^- для интуиционистского убеждения.

пропозициональной семантики, т.е. для любых миров w_i, w_j если w_iEw_j, то w_iRw_j. Также если w_1Rw_2 и w_2Ew_3, то w_1Ew_3. И последним условием является сериальность отношения E. Модальность знания определяется стандартно как $\Box$-модальность на отношении E. Также как и в случае с обновлением в интуиционистском пропозициональном исчислении, можно выбрать два типа трансформации системы. За базовый вариант мы принимаем обновление, при котором, помимо истинности формулы, также дается ее доказательство, т.е. в терминах семантики Крипке, остаются только те миры, в которых объявленная формула интуиционистски истинна.

Заключение

В статье рассматривались эпистемические аспекты интуиционистской логики, а также ее непосредственное расширение с помощью модальности знания. Было показано, что даже истинность в пропозициональной части можно трактовать с точки зрения эпистемологии как наличие доказательства. Безусловно, наличие доказательства не всегда влечет знание о нем, но в данном случае мы можем считать, что если есть доказательство (или же если оно предъявляется в рамках публичного анонсирования), то агент[19] его знает. Соответственно, можно говорить об обновлении знания уже в данном фрагменте. Чтобы выразить идею о том, что некоторое доказательство существует и верифицировано (однако у агента нет непосредственного к нему доступа), можно использовать понятие интуиционистского знания. Это может быть использовано для описания общего накопленного знания в рамках философии науки, в случае которого истинность с доказательством как реальное состояние агентов является распределенным между участниками. Многое из того, что агенты знают, представляет собой знание в интуиционистском смысле как результат достоверной проверки. Это касается не только веры в корректность доказательств, предложенных авторитетными учеными, но также и проверок с использованием автоматизированных механизмов, например компьютеров.

В статье были рассмотрены теоретические основания построения формально-логических систем для обновления информации, в которых в качестве базовой логики используется интуиционистское исчисление. Некоторые из рассмотренных вариантов уже построены автором статьи и в настоящий момент готовятся к публикации. Иные же еще предстоит формально проработать. Рассматривалось обновление информации в двух логиках, а именно в интуиционистском пропозициональном исчислении и в эпистемической интуиционистской логике, где знание трактуется как верифицированность формулы, а следовательно, является более слабым понятием, чем интуиционистская истинность. В качестве основы эпистемических систем была выбрана интуиционистская эпистемическая логика IEL, предложенная С. Артемовым и Т. Протопопеску. В рамках изучения изменения эпистемических состояний агентов обычно рассматриваются ситуации, в которых заранее известен уровень доверия агентов к источнику новой информации. Результаты, полученные для логики IEL, могут в дальнейшем

[19] Мы рассматривали ситуацию с одним агентом, но можно также исследовать случай мультиагентности.

быть применены в контексте аргументации, т.е. действий, направленных на порождение, предъявление и оценку аргументов в связи с целями, которые преследуют агенты.

Список литературы

Лисанюк Е.Н., Павлова А.М. Логические аспекты многообразия агентов // Известия Уральского федерального университета. Сер. 3: Общественные науки. 2016. Т. 11. № 4 (158). С. 45–60.

Межиров И.В. Игровая семантика для Int и Grz. Дипломная работа. М., 2006. 15 с.

Artemov S., Protopopescu T. Intuitionistic epistemic logic // The Review of Symbolic Logic. 2016. Vol. 9. No. 2. P. 266–298.

van Benthem J. Logical Dynamics of Information and Interaction. Cambridge; N.Y.: Cambridge University Press, 2010. 373 p.

van Benthem J., Liu F. Diversity of Logical Agents in Games // Philosophia Scientiæ. 2004. Vol. 8 (2). P. 165–181.

Brouwer L.E.J. Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1924. Bd. 154. S. 1–7.

van Dalen D., Troelstra A. Constructivism in Mathematics: An Introduction. Vol. I. Amsterdam; N.Y.; North-Holland: Elsevier, 1988. 361 p.

Egre P. Propositional Attitudes and Epistemic Paradoxes. PhD thesis. Paris: Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques, 2004. 316 p.

Kubyshkina E., Zaitsev D. Rational Agency from a Truth-Functional Perspective // Logic and Logical Philosophy. 2016. Vol. 25 (4). P. 499–520.

Lewis C.I., Langford C.H. Symbolic Logic. N.Y.: Century Company, 1932. 605 p.

Liu F. Diversity of Agents and their Interaction // Journal of Logic, Language and Information. 2008. Vol. 18 (1). P. 23–53.

Lorenzen P., Lorenz K. Dialogische Logik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1978. 238 S.

Pavlova A.M. What Hamblin's Formal Dialectic Tells About the Medieval Logical Disputation // Logical Investigations. 2017. Vol. 23. No. 1. P. 151–176.

Pavlova A. Dialogue games for minimal logic // Logic and Logical Philosophy. 2021. Vol. 30. P. 281–309.

Protopopescu T. Three Essays in Intuitionistic Epistemology. PhD thesis. N.Y.: CUNY, 2016. 117 p.

Urzyczyn P. Intuitionistic Games: Determinacy, Completeness, and Normalization // Studia Logica. 2016. Vol. 104. No. 5. P. 957–1001.

Knowledge and its dynamics in intuitionistic logic*

Alexandra M. Pavlova

TU Wien. 11 Favoritenstraße, Vienna, 1040, Austria; Institute of Philosophy, St. Petersburg State University. 5 Mendeleevskaya liniya, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; e-mail: pavlova.alex22@gmail.com

The article examines the problem of superposition of deductive and cognitive attitudes in the context of intuitionistic logic. The prerequisites and methods of modelling

* The reported study was funded by RFBR, project No. 20-011-00485 "Deliberative argumentation between reasoning and action".

the change in knowledge within the framework of epistemic logic are studied. The main emphasis is placed on the difference in the understanding of truth and knowledge in classical and intuitionistic logic. It is shown that an alternative understanding of truth in intuitionistic logic entails an understanding of the modality of knowledge that is different from the one used in classical logic.

Keywords: intuitionism, logical semantics, dynamic logic, epistemic logic, diversity of agents

For citation: Pavlova, A.M. "Znanie i ego dinamika v intuitsionistskoi logike" [Knowledge and its dynamics in intuitionistic logic], *Filosofskii zhurnal / Philosophy Journal*, 2022, Vol. 15, No. 3, pp. 113–124. (In Russian)

References

Artemov, S. & Protopopescu, T. "Intuitionistic epistemic logic", *The Review of Symbolic Logic*, 2016, Vol. 9, No. 2, pp. 266–298.

van Benthem, J. *Logical Dynamics of Information and Interaction*. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 2010. 373 pp.

van Benthem, J. & Liu, F. "Diversity of Logical Agents in Games", *Philosophia Scientiæ,* 2004, Vol. 8 (2), pp. 165–181.

Brouwer, L.E.J. "Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1924, Bd. 154, S. 1–7.

van Dalen, D. & Troelstra, A. *Constructivism in Mathematics: An Introduction*, Vol. I. Amsterdam; New York; North-Holland: Elsevier, 1988. 361 pp.

Egre, P. *Propositional Attitudes and Epistemic Paradoxes,* PhD thesis. Paris: Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques, 2004. 316 pp.

Kubyshkina, E. & Zaitsev, D. "Rational Agency from a Truth-Functional Perspective", *Logic and Logical Philosophy,* 2016, Vol. 25 (4), pp. 499–520.

Lewis, C.I. & Langford, C.H. *Symbolic Logic*. New York: Century Company, 1932. 605 pp.

Lisanyuk, E.N. & Pavlova, A.M. "Logicheskie aspekty mnogoobraziya agentov" [Logical aspects of the diversity of agents], *Izvestiya Ural'skogo federal'nogo universiteta, Seriya 3: Obshchestvennye nauki*, 2016, Vol. 11, No. 4 (158), pp. 45–60. (In Russian)

Liu, F. "Diversity of Agents and their Interaction", *Journal of Logic, Language and Information,* 2008, Vol. 18 (1), pp. 23–53.

Lorenzen, P. & Lorenz, K. *Dialogische Logik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1978. 238 S.

Pavlova, A.M. "What Hamblin's Formal Dialectic Tells About the Medieval Logical Disputation", *Logical Investigations,* 2017, Vol. 23, No. 1, pp. 151–176.

Pavlova, A. "Dialogue games for minimal logic", *Logic and Logical Philosophy*, 2021, Vol. 30, pp. 281–309.

Protopopescu, T. *Three Essays in Intuitionistic Epistemology*, PhD thesis. New York: CUNY, 2016. 117 pp.

Urzyczyn, P. "Intuitionistic Games: Determinacy, Completeness, and Normalization", *Studia Logica,* 2016, Vol. 104, No. 5, pp. 957–1001.